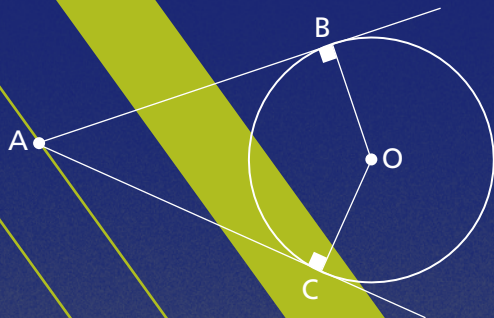


Alec Laporte
Gilles Rochette

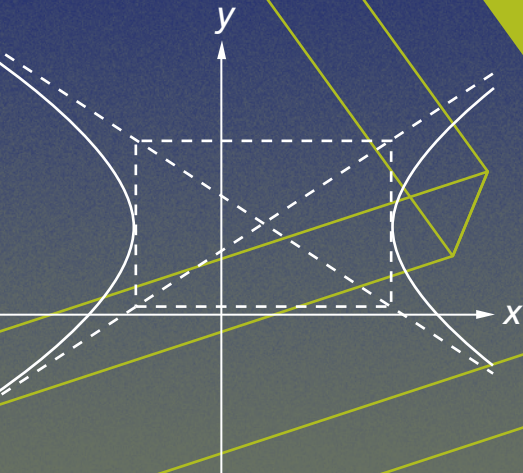
Mathématique secondaire 2^e cycle

3^e année (5^e secondaire)

Sciences naturelles • Technico-sciences • Culture, société et technique



COMMENT FAIRE!



Tiré à part



Chargé de projet: Gilles Rochette
Révision linguistique: Doris Lizotte
Conception et réalisation: Infoscan Collette, Québec

© 2010, Éditions Marie-France Itée



Tous droits réservés. Il est interdit de reproduire, d'adapter ou de traduire l'ensemble ou toute partie de cet ouvrage sans l'autorisation écrite du propriétaire du copyright.

Dépôt légal 2^e trimestre 2010
Bibliothèque et Archives Canada
Bibliothèque et Archives nationales du Québec

ISBN: 978-2-89661-013-6

Imprimé au Canada

*Nous reconnaissons l'aide financière du gouvernement du Canada par l'entremise du Programme d'aide au développement de l'industrie de l'édition pour nos activités d'édition.
Gouvernement du Québec – Programme de crédit d'impôt pour l'édition de livres – Gestion SODEC*

Éditions Marie-France sont membres de



Table des matières

Algèbre

Item 1	Décrire un sous-ensemble des nombres réels	page 1
Item 2	Calculer avec des exposants entiers, des exposants fractionnaires ou des racines carrées	page 4
Item 3	Rendre rationnel le dénominateur d'une fraction	page 14
Item 4	Additionner ou soustraire deux polynômes	page 16
Item 5	Multiplier deux polynômes	page 18
Item 6	Diviser deux polynômes	page 21
Item 7	Décomposer un polynôme en facteurs	page 25
Item 8	Réduire une fraction algébrique	page 34
Item 9	Additionner ou soustraire deux fractions algébriques	page 35
Item 10	Multiplier ou diviser deux fractions algébriques	page 38
Item 11	Résoudre une équation du premier degré à une variable	page 40
Item 12	Résoudre une inéquation du premier degré à une variable	page 41
Item 13	Trouver le terme manquant d'une proportion	page 43
Item 14	Trouver des couples solutions d'une équation du premier degré à deux variables	page 45
Item 15	Résoudre un système d'équations du premier degré à deux variables	page 47
Item 16	Effectuer des opérations sur des matrices	page 58

Fonctions

Item 17	Identifier une fonction	page 62
Item 18	Représenter graphiquement la réciproque d'une fonction	page 70
Item 19	Représenter graphiquement une fonction constante $f(x) = b$	page 72
Item 20	Représenter graphiquement une fonction polynomiale du premier degré $f(x) = ax + b$	page 73
Item 21	Trouver les zéros, le domaine, l'image et les intervalles de croissance ou de décroissance d'une fonction polynomiale du premier degré	page 76
Item 22	Trouver l'équation associée à une fonction polynomiale du premier degré $f(x) = ax + b$	page 82
Item 23	Représenter graphiquement une fonction polynomiale du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$	page 87
Item 24	Écrire l'équation d'une fonction polynomiale du second degré sous la forme générale, canonique ou factorisée	page 92
Item 25	Trouver les coordonnées du sommet et l'équation de l'axe de symétrie de la parabole représentant une fonction polynomiale du second degré	page 97
Item 26	Déterminer le domaine et l'image, le maximum ou le minimum, les intervalles de croissance ou de décroissance et le signe d'une fonction polynomiale du second degré	page 100
Item 27	Trouver l'équation d'une fonction polynomiale du second degré	page 106
Item 28	Résoudre une équation du second degré à une variable	page 109
Item 29	Trouver les zéros d'une fonction polynomiale du second degré	page 116
Item 30	Résoudre une inéquation du second degré à une variable	page 121

Item 31	Représenter graphiquement une fonction valeur absolue $f(x) = a b(x - h) + k$	page 123
Item 32	Résoudre une équation ou une inéquation lorsque la variable apparaît à l'intérieur d'une valeur absolue	page 128
Item 33	Représenter graphiquement une fonction racine carrée $f(x) = a\sqrt{b(x - h)} + k$	page 133
Item 34	Résoudre une équation ou une inéquation lorsque la variable apparaît sous une racine carrée	page 137
Item 35	Représenter graphiquement une fonction rationnelle $f(x) = \frac{a}{b(x - h)} + k$	page 142
Item 36	Représenter graphiquement une fonction rationnelle $f(x) = \frac{mx + n}{px + q}$	page 145
Item 37	Résoudre une équation ou une inéquation rationnelle	page 148
Item 38	Représenter graphiquement une fonction exponentielle $f(x) = ac^{b(x-h)} + k$	page 152
Item 39	Résoudre une équation ou une inéquation exponentielle	page 158
Item 40	Trouver le logarithme d'un nombre	page 162
Item 41	Représenter graphiquement une fonction logarithmique $f(x) = a \log_c b(x - h) + k$	page 165
Item 42	Appliquer les propriétés des logarithmes	page 168
Item 43	Résoudre une équation ou une inéquation logarithmique	page 170
Item 44	Représenter graphiquement une fonction partie entière $f(x) = a[b(x - h)] + k$	page 174

Item 45	Convertir des unités de mesures d'angles	page 179
Item 46	Trouver les coordonnées d'un point du cercle trigonométrique	page 182
Item 47	Trouver l'image d'un nombre réel par une des six fonctions trigonométriques	page 189
Item 48	Représenter graphiquement les fonctions $f(x) = a \sin b(x - h) + k$ et $f(x) = a \cos b(x - h) + k$	page 193
Item 49	Représenter graphiquement la fonction $f(x) = a \tan b(x - h) + k$	page 203
Item 50	Simplifier une expression trigonométrique à l'aide d'identités trigonométriques	page 208
Item 51	Résoudre une équation ou une inéquation trigonométrique	page 212
Item 52	Trouver la composée de deux fonctions	page 219

Géométrie analytique

Item 53	Trouver la distance entre deux points du plan cartésien	page 220
Item 54	Trouver les coordonnées du point milieu d'un segment de droite	page 221
Item 55	Trouver les coordonnées d'un point qui partage un segment de droite dans un rapport donné	page 222
Item 56	Représenter graphiquement l'ensemble-solution d'une équation du premier degré à deux variables	page 225
Item 57	Trouver les coordonnées à l'origine d'une droite	page 228
Item 58	Trouver la pente d'une droite	page 230
Item 59	Trouver la distance entre un point et une droite	page 233

Item 60	Trouver la pente d'une droite parallèle ou perpendiculaire à une droite donnée	page 235
Item 61	Trouver l'équation d'une droite	page 238
Item 62	Représenter graphiquement l'ensemble-solution d'une inéquation du premier degré à deux variables	page 246
Item 63	Trouver l'inéquation associée à un demi-plan	page 250
Item 64	Représenter graphiquement l'ensemble-solution d'un système d'inéquations du premier degré à deux variables	page 252
Item 65	Trouver les coordonnées des sommets d'un polygone de contraintes	page 254
Item 66	Trouver les valeurs qui optimisent une fonction à l'aide d'un polygone de contraintes	page 258

Coniques

Item 67	Identifier une conique	page 260
Item 68	Représenter graphiquement une relation associée à une parabole si son sommet est à l'origine	page 264
Item 69	Représenter graphiquement une relation associée à une parabole si les coordonnées de son sommet sont (h, k)	page 269
Item 70	Représenter graphiquement une relation associée à un cercle centré à l'origine	page 271
Item 71	Représenter graphiquement une relation associée à un cercle si les coordonnées de son centre sont (h, k)	page 272
Item 72	Représenter graphiquement une relation associée à une ellipse centrée à l'origine	page 274

Item 73	Représenter graphiquement une relation associée à une ellipse si les coordonnées de son centre sont (h, k) ...	page 277
Item 74	Représenter graphiquement une relation associée à une hyperbole centrée à l'origine	page 279
Item 75	Représenter graphiquement une relation associée à une hyperbole si les coordonnées de son centre sont (h, k)	page 282
Item 76	Trouver la longueur d'un segment reliant deux points d'une conique	page 284
Item 77	Écrire l'équation associée à une conique sous la forme canonique	page 288
Item 78	Résoudre un système d'équations à deux variables, une des équations est du premier degré et l'autre du second degré ...	page 292
Item 79	Résoudre un système d'équations du second degré	page 295

Géométrie

Item 80	Convertir des unités de mesure	page 299
Item 81	Trouver l'aire d'un triangle, d'un quadrilatère ou d'un polygone régulier	page 301
Item 82	Trouver la circonférence d'un cercle ou la longueur d'un arc de cercle	page 304
Item 83	Trouver l'aire d'un disque ou l'aire d'un secteur circulaire	page 305
Item 84	Trouver l'aire latérale, l'aire totale ou le volume d'un solide ...	page 305
Item 85	Trouver l'aire d'un triangle à l'aide de la formule de Héron ...	page 310
Item 86	Trouver la mesure d'un angle ou d'un segment en appliquant des théorèmes	page 311

Item 87	Identifier des figures équivalentes	page 315
Item 88	Trouver une mesure manquante à l'aide du rapport de similitude de deux figures semblables	page 315
Item 89	Trouver l'aire d'une figure issue d'une similitude	page 318
Item 90	Trouver le volume d'un solide issu d'une similitude	page 319
Item 91	Trouver une mesure manquante à l'aide des relations métriques dans un triangle rectangle	page 321
Item 92	Trouver une mesure manquante à l'aide des relations métriques dans un cercle	page 330
Item 93	Trouver la mesure d'un angle ou d'un côté d'un triangle rectangle à l'aide des rapports trigonométriques	page 337
Item 94	Appliquer la loi des sinus	page 340
Item 95	Appliquer la loi des cosinus	page 342
Item 96	Tracer l'image d'une figure par une translation dans le plan cartésien	page 343
Item 97	Tracer l'image d'une figure par une réflexion dans le plan cartésien	page 345
Item 98	Tracer l'image d'une figure par une rotation dans le plan cartésien	page 347
Item 99	Tracer l'image d'une figure par une homothétie dans le plan cartésien	page 348
Item 100	Tracer l'image d'une figure par une dilatation ou une contraction dans le plan cartésien	page 351
Item 101	Calculer la norme d'un vecteur	page 354
Item 102	Additionner ou soustraire deux vecteurs	page 356
Item 103	Calculer le produit scalaire de deux vecteurs	page 358

Item 104	Simplifier une expression à l'aide des propriétés des opérations sur des vecteurs	page 360
Item 105	Identifier les éléments associés à un graphe	page 362
Item 106	Déterminer la chaîne de valeur optimale dans un graphe valué, orienté ou non	page 365
Item 107	Trouver un arbre de valeur optimale dans un graphe valué ...	page 369
Item 108	Trouver le chemin critique d'un graphe	page 370
Item 109	Colorer les sommets d'un graphe	page 372

Probabilité et statistique

Item 110	Trouver une approximation d'un coefficient de corrélation linéaire	page 374
Item 111	Trouver l'équation d'une droite de régression	page 377
Item 112	Trouver la probabilité d'un événement lors d'une expérience aléatoire	page 382
Item 113	Trouver la probabilité d'un événement lors d'un tirage avec remise ou sans remise	page 383
Item 114	Trouver la probabilité fréquentielle d'un événement	page 384
Item 115	Calculer une probabilité dans un contexte géométrique	page 385
Item 116	Calculer les « chances pour » ou les « chances contre » d'un événement	page 386
Item 117	Calculer l'espérance mathématique	page 387
Item 118	Trouver une probabilité subjective	page 388
Item 119	Trouver une probabilité conditionnelle	page 389

Représenter graphiquement la fonction d'équation $f(x) = -3|5 - x| + 2$.

On écrit l'équation de la fonction sous la forme $f(x) = a|x - h| + k$.

$$\begin{aligned} f(x) &= -3|5 - x| + 2 \\ &= -3|-x + 5| + 2 \\ &= -3|-1(x - 5)| + 2 \\ &= -3 \times |-1| \times |x - 5| + 2 \\ &= -3 \times 1 \times |x - 5| + 2 \\ f(x) &= -3|x - 5| + 2 \end{aligned}$$

Le sommet de la courbe est donné par les valeurs des paramètres h et k .

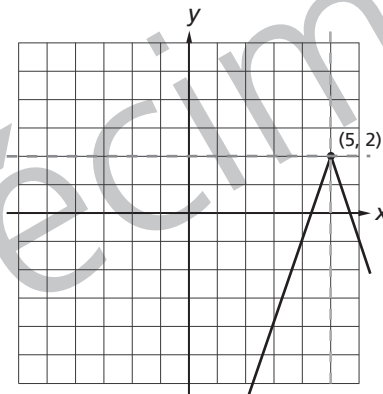
Les coordonnées du sommet sont $(5, 2)$.

On trace un système d'axes en pointillés dont l'origine a pour coordonnées $(5, 2)$.

On utilise le système d'axes en pointillés pour tracer le graphique de $f'(x) = -3|x|$.

La pente d'une demi-droite est 3 et la pente de l'autre demi-droite est -3.

La concavité du V est tournée vers le bas.



Simple mise en évidence du coefficient de x

dom $f = \mathbb{R}$ et ima $f =]-\infty, 2]$

L'axe de symétrie de la courbe est la droite d'équation $x = 5$.

Les zéros de la fonction sont $4\frac{1}{3}$ et $5\frac{2}{3}$. Voir item 32

La fonction est positive

$$\text{si } x \in \left[4\frac{1}{3}, 5\frac{2}{3}\right].$$

La fonction est négative

$$\text{si } x \in]-\infty, 4\frac{1}{3}] \cup \left[5\frac{2}{3}, \infty\right).$$

La fonction est croissante si $x \in]-\infty, 5]$.

La fonction est décroissante si $x \in [5, \infty)$.

Si $b > 0$ et $b \neq 1$,

$$\log_b 1 = 0$$

Car $b^0 = 1$

$$\log_b b = 1$$

Car $b^1 = b$

$$\log_b \frac{1}{b} = -1$$

Car $b^{-1} = \frac{1}{b}$

$$\log_b b^m = m$$

Car $b^m = b^m$

Le logarithme d'un nombre peut être négatif.

$$\log_3 \frac{1}{9} = -2$$

Car $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Le logarithme d'un nombre négatif est indéterminé.

$$\log_3 -3 = ?$$

Aucune puissance de base 3 ne peut être égale à -3.

On choisit un couple pour déterminer les demi-plans.

Avec $(0, 0)$

$$2x - y - 4 \leq 0$$

$$0 - 0 - 4 \leq 0$$

C'est une proposition vraie.

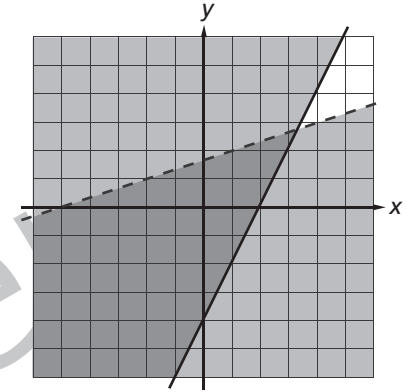
Avec $(0, 0)$

$$x - 3y + 5 > 0$$

$$0 - 0 + 5 > 0$$

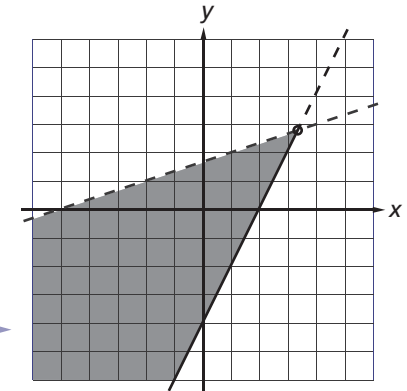
C'est une proposition vraie.

On trace les demi-plans.



L'ensemble-solution est représenté par l'intersection des demi-plans.

Le couple donné par les coordonnées du point d'intersection des deux droites n'est pas solution du système.



Les coordonnées des foyers d'une ellipse sont $(5, 0)$ et $(-5, 0)$. Le grand axe mesure 12 unités. Quelle relation est représentée par cette ellipse ?

L'équation de l'ellipse est de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Le grand axe est sur l'axe des x puisque les foyers sont des points de l'axe des x .

La valeur du paramètre a est donnée par $12 \div 2$, soit 6.

La valeur du paramètre b est trouvée à l'aide de la formule

$$a^2 = b^2 + c^2$$

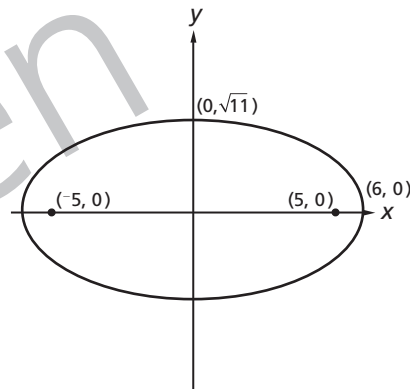
$$6^2 = b^2 + 5^2$$

$$b^2 = 36 - 25$$

$$b^2 = 11$$

$$b = \sqrt{11}$$

La relation est $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1 \right\}$.



Représenter graphiquement la relation $R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{25} = 1 \right\}$.

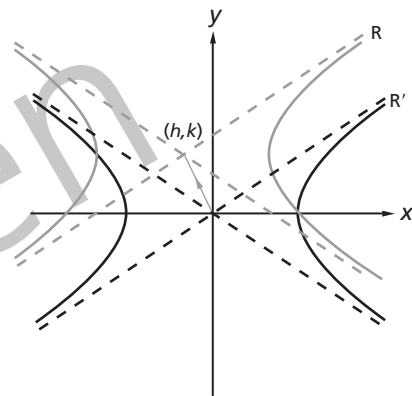
La valeur du paramètre a est $\sqrt{5}$ et les coordonnées des sommets sur l'axe des x sont $(\sqrt{5}, 0)$ et $(-\sqrt{5}, 0)$, soit approximativement $(2,2, 0)$ et $(-2,2, 0)$.

La valeur du paramètre b est $\sqrt{25}$, soit 5.

Item 75

Représenter graphiquement une relation associée à une hyperbole si les coordonnées de son centre sont (h, k)

L'hyperbole représentant la relation $R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = \pm 1 \right\}$ est l'image de l'hyperbole représentant la relation $R' = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \right\}$ par une translation $t(h, k)$.



Représenter graphiquement la relation $R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y - 68 = 0 \right\}$.

La relation est représentée par une hyperbole car les coefficients de x^2 et y^2 n'ont pas le même signe.

On écrit l'équation sous la forme canonique. ←

■ Voir item 77

Ellipse ou hyperbole

Les coefficients des termes du second degré sont différents dans l'équation écrite sous la forme générale.



Écrire l'équation de l'hyperbole $25x^2 - 500x - 9y^2 + 72y + 2581 = 0$ sous la forme canonique.

On regroupe les termes en x et les termes en y et on effectue une mise en évidence des coefficients de x^2 et y^2 sur les binômes.

$$\begin{aligned}25x^2 - 500x - 9y^2 + 72y &= -2581 \\25(x^2 - 20x) - 9(y^2 - 8y) &= -2581\end{aligned}$$

On complète les binômes pour obtenir des trinômes carrés parfaits.

$$25\left(x^2 - 20x + \left(\frac{20}{2}\right)^2\right) - 9\left(y^2 - 8y + \left(\frac{8}{2}\right)^2\right) = -2581 + 25 \times \left(\frac{20}{2}\right)^2 - 9 \times \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

■ Voir item 7

$$\begin{aligned}25(x^2 - 20x + 100) - 9(y^2 - 8y + 16) &= -2581 + 2500 - 144 \\25(x - 10)^2 - 9(y - 4)^2 &= -225\end{aligned}$$

On divise chaque terme de l'équation par 225 pour obtenir -1 dans le deuxième membre.

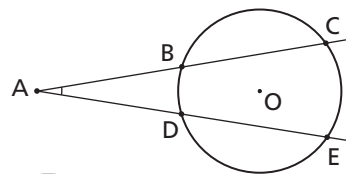
$$\begin{aligned}\frac{25(x - 10)^2}{225} - \frac{9(y - 4)^2}{225} &= \frac{-225}{225} \\ \frac{(x - 10)^2}{9} - \frac{(y - 4)^2}{25} &= -1\end{aligned}$$

$$\frac{25}{225} = \frac{1}{9} \text{ et } \frac{9}{225} = \frac{1}{25}$$

Théorème 10

Dans un cercle, la mesure d'un angle dont le sommet est à l'extérieur du cercle est égale à la demi-différence des mesures des arcs interceptés par les côtés.

$$m\angle CAE = \frac{1}{2} \times (m\widehat{CE} - m\widehat{BD})$$



On a tracé deux sécantes et deux cordes dans un cercle.

L'arc BE mesure 34° et l'arc CD mesure 92° . Trouver les mesures des angles CED, CFD et CAD.

L'angle CED est un angle inscrit.

$$m\angle CED = \frac{1}{2} m\widehat{CD}$$

$$m\angle CED = \frac{1}{2} \times 92^\circ = 46^\circ$$

L'angle CFD a son sommet à l'intérieur du cercle.

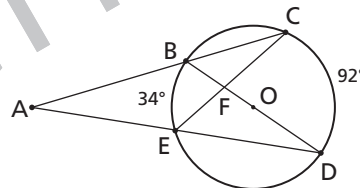
$$m\angle CFD = \frac{1}{2} \times (m\widehat{BE} + m\widehat{CD})$$

$$m\angle CFD = \frac{1}{2} \times (92^\circ + 34^\circ) = 63^\circ$$

L'angle CAD a son sommet à l'extérieur du cercle.

$$m\angle CAD = \frac{1}{2} \times (m\widehat{CD} - m\widehat{BE})$$

$$m\angle CAD = \frac{1}{2} \times (92^\circ - 34^\circ) = 29^\circ$$



Une réflexion dans un plan cartésien est déterminée par les règles suivantes.

Si l'axe des x est l'axe de réflexion,

$$s_x: (x, y) \mapsto (x, -y)$$

Si l'axe des y est l'axe de réflexion,

$$s_y: (x, y) \mapsto (-x, y)$$

Si la bissectrice du premier quadrant est l'axe de réflexion,

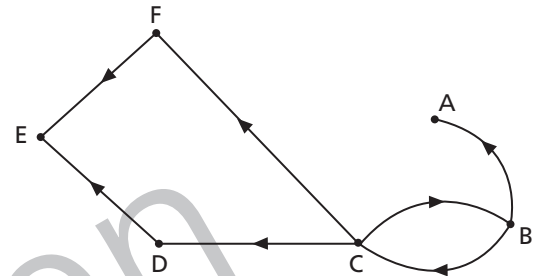
$$s: (x, y) \mapsto (y, x)$$

Si la bissectrice du deuxième quadrant est l'axe de réflexion,

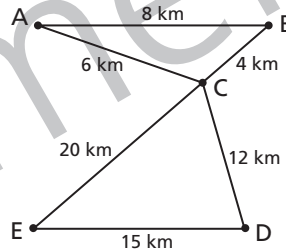
$$s: (x, y) \mapsto (-y, -x)$$



Un graphe où les arêtes ont une orientation ou un sens est appelé un **graphe orienté**.



Un graphe où les arêtes ont une valeur est appelé un **graphe valué**.

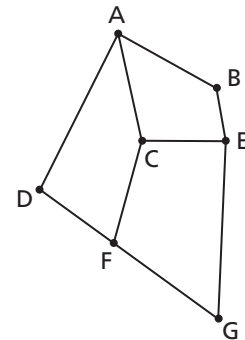


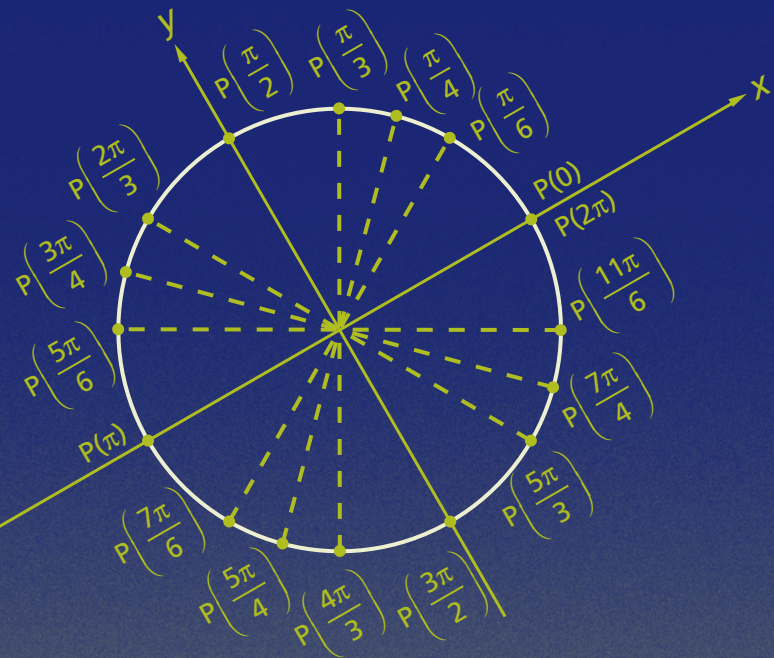
Une **chaîne** est une suite d'arêtes consécutives ayant un **point de départ** et un **point d'arrivée**.

ABEG est une chaîne.

Un **cycle** est une chaîne dont les **points de départ et d'arrivée coïncident**.

ABECA est un cycle.





Comment faire ! est un livre de référence qui s'adresse aux élèves de la 3^e année du 2^e cycle du secondaire. Les items présentés sont au programme de mathématique du ministère de l'Éducation.

Ce livre sera un outil précieux pour l'élève, à qui il servira de :

- référence lors de travaux à la maison ou à l'école ;
- matériel de révision de ses connaissances avant une évaluation ;
- support en cas d'oubli d'une définition, d'une formule ou de faiblesse dans ses habiletés opératoires qui l'empêcheraient de résoudre un problème.